

Lire et définir une suite

Notation, rangs et deux modes de définition

VOCABULAIRE

(u_n) désigne la suite. u_n est son terme de rang n et est souvent appelé terme général. L'indice de départ peut être 0, 1 ou un autre entier : il faut le repérer.

À distinguer : u_0 est un nombre ; (u_n) est toute la suite.

Définition explicite

Le terme est donné directement en fonction de son rang.

$$u_n = f(n)$$

Exemple $a_n = 3n^2 - 2n + 1$

$$a_4 = 3 \times 4^2 - 2 \times 4 + 1 = 41$$

Atout : on atteint directement n'importe quel rang.

Définition par récurrence

Il faut un premier terme et une relation pour passer au suivant.

$$u_0 \text{ donné et } u_{n+1} = f(u_n)$$

Exemple $v_0 = 5$; $v_{n+1} = 0,8v_n + 3$

$$v_1 = 0,8 \times 5 + 3 = 7$$

$$v_2 = 0,8 \times 7 + 3 = 8,6$$

Vigilance : chaque terme dépend du précédent.

Le protocole avant chaque calcul



Erreur fréquente : si u_0 est donné, la première application de la relation calcule u_1 — et non u_0 .

Arithmétique ou géométrie ?

Reconnaître le modèle et choisir la formule adaptée aux indices

SUITE ARITHMÉTIQUE

On ajoute toujours le même nombre r .

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Formule depuis un rang p connu

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

Reconnaître :

$$u_{n+1} - u_n = r \text{ pour tout } n.$$

Exemple

$$u_4 = 11 \text{ et } r = 3$$

$$u_n = 11 + (n - 4) \times 3$$

$$u_n = 3n - 1$$

Variations : $r > 0$ croissante ; $r = 0$ constante ; $r < 0$ décroissante.

SUITE GÉOMÉTRIQUE

On multiplie toujours par le même nombre q .

$$v_{n+1} = qv_n$$

Formule depuis un rang p connu

$$v_n = v_p \times q^{n-p}$$

Reconnaître :

$$v_{n+1} = qv_n \text{ pour tout } n.$$

$$\text{Si } v_n \neq 0 : v_{n+1}/v_n = q.$$

Exemple

$$v_2 = 18 \text{ et } q = 1/3$$

$$v_n = 18 \times (1/3)^{n-2}$$

$$v_6 = 18 \times (1/3)^4 = 2/9$$

$q < 0$: les signes alternent en général ; la suite n'est alors pas monotone.

Le bon exposant : compter les passages

De l'indice p à l'indice n , il y a $n - p$ passages.



À chaque passage : $+ r$ pour une suite arithmétique, $\times q$ pour une suite géométrique.

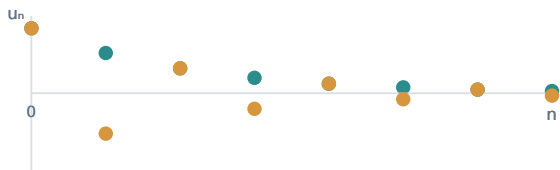
Test éclair : $u_{n+1} = 0,8u_n + 2$ n'est ni arithmétique ni géométrique en général.

Limites des suites géométriques

Tous les cas réels — les points représentent les termes (n ; u_n)

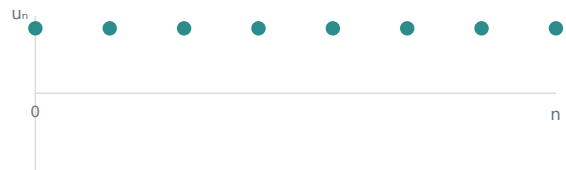
Pour $u_n = u_0 q^n$, observer séparément la taille $|q|$, le signe de q et le signe de u_0 .

$|q| < 1$



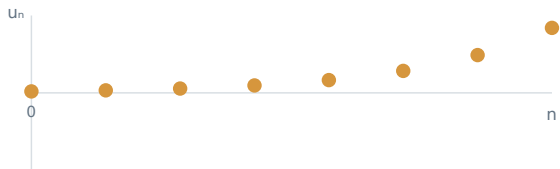
Toujours $u_n \rightarrow 0$. Si $q < 0$, les signes alternent. Pour $q = 0$: $u_n = 0$ dès $n = 1$.

$q = 1$



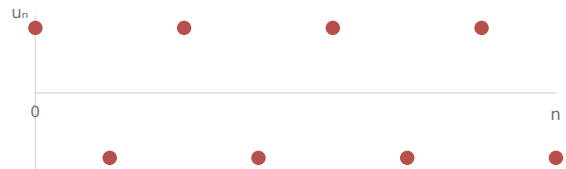
La suite est constante : $u_n = u_0$. Sa limite vaut u_0 .

$q > 1$



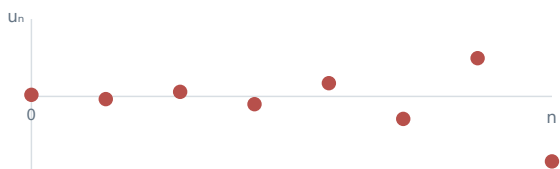
$u_0 > 0$: $+\infty$ • $u_0 < 0$: $-\infty$ • $u_0 = 0$: 0.

$q = -1$



Si $u_0 \neq 0$, alternance entre u_0 et $-u_0$: aucune limite. Si $u_0 = 0$: limite 0.

$q < -1$



Si $u_0 \neq 0$, signes alternés et $|u_n| \rightarrow +\infty$: aucune limite. Si $u_0 = 0$: limite 0.

RÉFLEXE

Ne jamais écrire
« $q < 1$ donc $q^n \rightarrow 0$ ».

La bonne condition est
 $|q| < 1$.

Contre-exemple : $q = -2$ est inférieur à 1, pourtant $(-2)^n$ n'a pas de limite.

Démontrer par récurrence

Un protocole fixe : propriété, initialisation, hérédité, conclusion

Principe : on vérifie que la propriété est vraie au départ, puis que sa vérité à un rang entraîne sa vérité au rang suivant.

1

Poser P_n

Écrire précisément la propriété et le rang de départ.

2

Initialisation

Vérifier P_{n_0} au premier rang n_0 .

3

Hérédité

Fixer $n \geq n_0$, supposer P_n vraie, puis établir P_{n+1} .

4

Conclusion

Conclure « par récurrence » pour tout $n \geq n_0$.

EXEMPLE RÉDIGÉ

$w_0 = 2$ et $w_{n+1} = 0,5w_n + 3$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \leq 6$.

Propriété. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons P_n : « $w_n \leq 6$ ».

Initialisation. $w_0 = 2 \leq 6$, donc P_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons P_n vraie : $w_n \leq 6$. Comme $0,5 > 0$, $0,5w_n \leq 3$. Ainsi $w_{n+1} = 0,5w_n + 3 \leq 6$. Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \leq 6$.

ERREURS FRÉQUENTES

- vérifier seulement quelques rangs
- oublier le rang de départ
- supposer déjà P_{n+1}
- ne pas utiliser l'hypothèse P_n
- oublier la conclusion
- multiplier une inégalité par un nombre négatif sans inverser son sens